



## Серия №20. Многочлены. Теорема Безу

13 июля

**Определения.** Многочлен – это выражение вида  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , коэффициенты которого принадлежат некоторому числовому множеству  $K$ . Пишут  $P(x) \in K[x]$ .

**Теорема (определение) о делении с остатком.** Для многочленов  $A(x)$  и  $B(x) \neq 0$  существуют единственные\* многочлены  $Q(x)$  и  $R(x)$  такие, что выполняется равенство  $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ , причём  $\deg B(x) > \deg R(x)$ . Если же  $R(x) \equiv 0$ , то  $A(x)$  делится на  $B(x)$ .

\*Для этого нужно, чтобы в  $K$  было определено деление и не было делителей нуля, т.е. таких  $a, b \neq 0$ , что  $ab = 0$ .

**Теорема Безу.** Даны многочлен  $P(x)$  и число  $a$ . Тогда многочлен  $P(x)$  можно представить в виде  $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$ , притом  $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$ .

**Следствие.** Если  $a$  – корень  $P(x)$ , то его можно представить в виде  $P(x) = (x - a)Q(x)$ .

**Следствие 2.** Многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  различных корней\*.

**Следствие 3.** Если многочлен  $P(x)$  делится на многочлен  $Q(x)$ , то корни  $Q(x)$  являются и корнями  $P(x)$ .

### Задачи

1. Найдите, при каких  $a$  и  $b$  многочлен  $x^{10} + ax^2 + bx + 1$  делится на  $x^2 - 1$ .
2. Найдите все целые  $x$ , при которых число  $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$  делится на  $x^2 + 1$ .
3. Многочлен  $P(x)$  таков, что  $P(x^n) : x - 1$ . Докажите, что тогда  $P(x^n) : x^n - 1$ .
4. Найдите все натуральные  $n, k$  и простые  $p$  такие, что  $n^5 + 2n + 3 = p^k$ .
5. Про многочлен  $P(x)$  степени 10 с действительными коэффициентами известно, что  $P(1) = P(-1), \dots, P(5) = P(-5)$ . Докажите, что  $P(x) = P(-x)$  для любого  $x$ .
6. Многочлен  $x^3 + px^2 + qx + r$  имеет три различных корня в интервале  $(0; 2)$ . Докажите, что тогда  $-2 < p + q + r < 0$ .
7. Многочлен  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  имеет три различных корня, а многочлен  $P(Q(x))$ , где  $Q(x) = x^2 + x + 2025$ , корней не имеет. Докажите, что  $P(2025) > \frac{1}{64}$ .
8. Два многочлена  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  и  $Q(x) = x^2 + px + q$  принимают отрицательные значения на некотором интервале  $I$  длины более 2, а вне  $I$  – неотрицательны. Докажите, что найдётся такая точка  $x_0$ , что  $P(x_0) < Q(x_0)$ .